النهايــات والاتصـــــال

I- أنشطـــة :

1- أحسب النهايات التالية :

- $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}x^2+x+1$$
$$=3$$

- $$\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+5)}{3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x+5}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$
$$=1$$

- $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$$ مع : $0\prec q$ و $0\prec p$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+p^2-p^2\right)\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(x^2+q^2-q^2\right)\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+q^2}+q\right)}{\left(\sqrt{x^2+p^2}+p\right)}$$
$$=\frac{2q}{2p}$$
$$=\frac{q}{p}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2+3...+n}{n^2}$$

لنحسب :
$$S=1+2+3+...+n$$
$$S=n+(n-1)+(n-2)+...+1$$

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{\text{n مـــــــرة}}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

إذن :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2+3\ldots+n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\,\frac{n^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

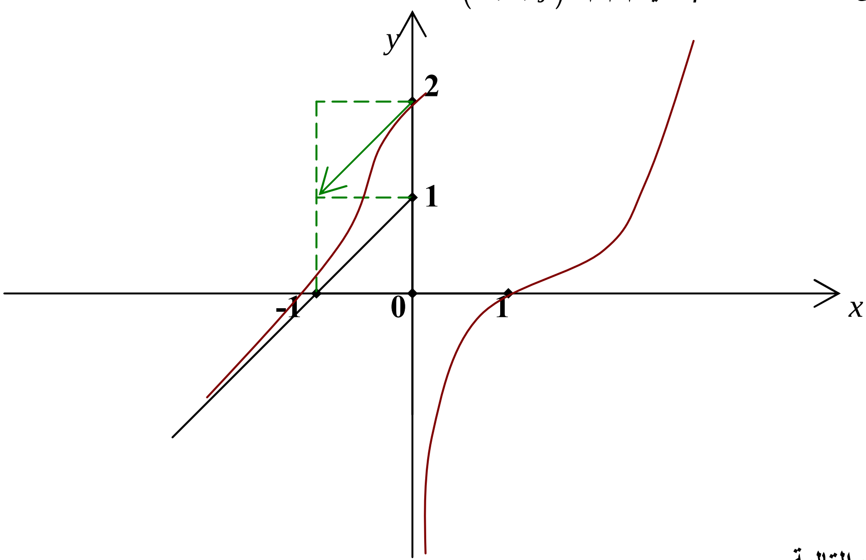
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

-2 ليكن ℓ_f المنحنى الممثل للدالة f في م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- حدد D_f.



- حدد النهايات التالية :

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$
* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} f(x)$
* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x$
* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\prec0}} \dfrac{f(x)-2}{x}$
* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

الجــواب :

- $D_f =]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[$
-

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x) = -\infty$

* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \prec 0}} f(x) = 2$

* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

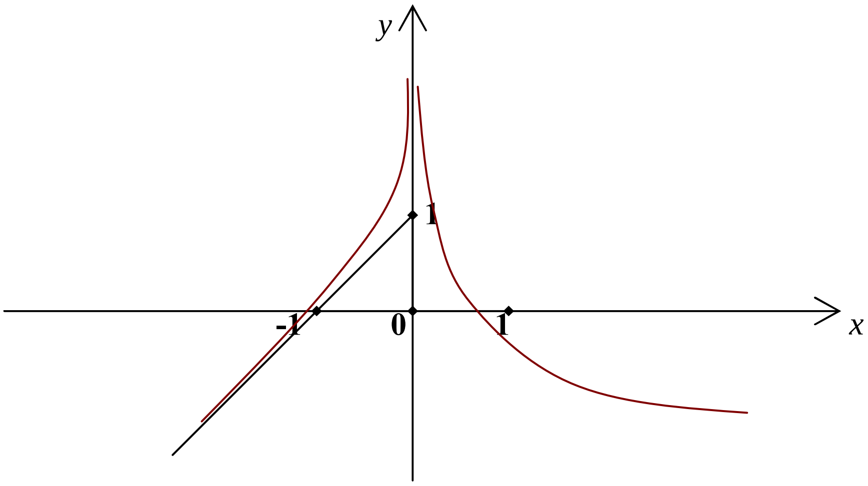
* $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = 1$

* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \prec 0}} \frac{f(x) - 2}{x} = 1$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

(لأن ℓ_f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب).

3- ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.



- حدد D_f.
- حدد النهايات التالية :

* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} f(x)$

* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \prec 0}} f(x)$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

- هل f متصلة في 0 ؟
- حدد :

* $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) - x$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

- أعط جدول تغيرات f ، ثم جدول تغيرات الدالة $g=|f|$.

الجــواب :

- $D_f \;=\;]-\infty,0[\;\cup\; \{0\} \;\cup\;]0,+\infty[\;=\; \mathbb{R}$

- $* \;\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=+\infty$

$* \;\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} f(x)=+\infty$

$* \;\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

$* \;\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

- f ليست متصلة لأن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

- $* \;\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$

$* \;\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-x=1$

$* \;\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$

-

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		**-1**		**0**		**1**		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	**0**	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	**0**	$\nearrow$	$+\infty$

4- حدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

- $f(x)=\sqrt{|x|\left(x^2-1\right)}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \;\;/\;\; |x|\left(x^2-1\right)\geq 0\right\}$

x	$-\infty$		**-1**		**0**		**1**		$+\infty$
x^2-1		+	0	-		-	0	+	
$\lvert x\rvert$		+		+	0	+		+	
$\lvert x\rvert\left(x^2-1\right)$		+	0	-	0	-	0	+	

$D_f \;=\;]-\infty,-1] \;\cup\; \{0\} \;\cup\; [1,+\infty[$

- $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}-x^2}$

$D_f \;=\; \left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq 0 \quad \text{و} \quad \dfrac{1}{x}-x^2\geq 0\right\}$

$$\frac{1}{x}-x^2 = \frac{1-x^3}{x}$$
$$= \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x}$$

x	$-\infty$ 0	0 1	1 $+\infty$
$1-x$	+	+ 0	-
x	- 0	+	+
$\frac{1-x}{x}$	- ‖	+ 0	-

$$D_f =]0,1]$$

5- ليكن k عددا حقيقيا و f دالة معرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+kx+1 & ; \quad x \succ -1 \\ f(x)=\dfrac{x+1}{x-2} & ; \quad x \le -1 \end{cases}$$

حدد k لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

الجـواب :

لدينا f متصلة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

إذن : لكي تكون f ممتصلة على $\mathbb{R}$ يكفي أن تكون متصلة في -1 .

ولهذا يكفي ان تكون :

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x) = f(-1)$$

أي : $0 = 2 - k$

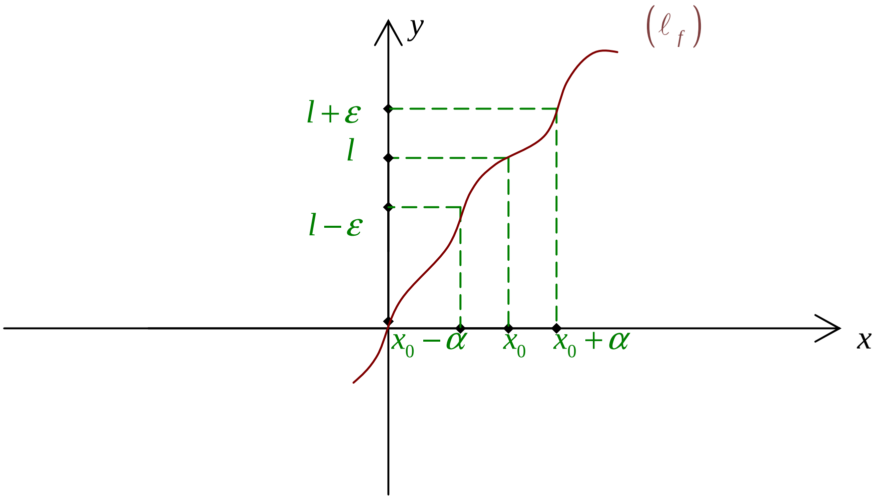
$$k = 2$$

II- تعاريــف :

1- النهايــات :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

نقول أن نـهاية $f(x)$ عندما تؤول x إلى x_0 هي l إذا وفقط إذا كان : كلما اقتربت x من x_0 فإن $f(x)$ تقترب من l.



العمليات على النهايات :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} (f \times g)(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$
l	l'	$l + l'$	$l \cdot l'$	$\dfrac{l}{l'}$; $l' \neq 0$
$l \succ 0$; l	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$l \succ 0$; l	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$-\infty$	l' ; $l' \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$F.I$
0	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$	0
0	0	0	0	$F.I$

الأشكال غير المحددة :

$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$	$0 \times \infty$	$(+\infty) - (+\infty)$

2- الاتصـــال

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال مفتوح مركزه x_0 ، $x_0 \in \mathbb{R}$

- نقول أن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

- نقول أن f متصلة في x_0 على اليسار إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

الاتصال على مجال :

تكون f متصلة على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ومتصلة في a على اليمين وفي b على اليسار.

3- مركب دالتين Composée de 2 fonctions

خاصيـــات :

1- مركبة دالتين متصلتين هي دالة متصلة.

2- إذا كانت f متصلة في x_0 و g دالة متصلة في $y_0 = f(x_0)$.

فإن : gof متصلة في x_0.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & y_0 = f(x_0) \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

3-

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & J \arrow[r, "g"] & K \end{tikzcd}$$

إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J حيث $f(I) \subset J$

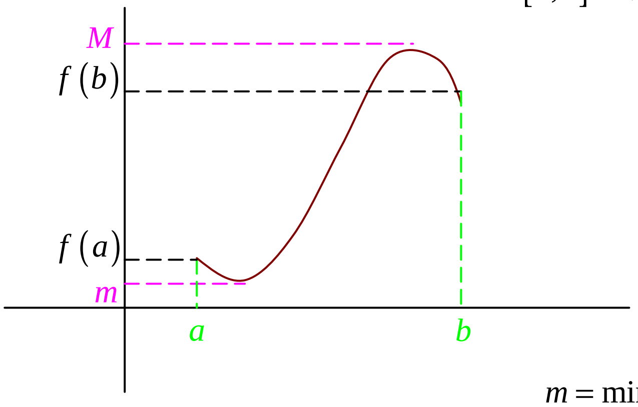
فإن : gof متصلة على I .

4- إذا كانت f تقبل نهاية في x_0 ، $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ و g دالة متصلة في y_0 .

فإن : $$\lim\limits_{x \to x_0} gof(x) = g(y_0)$$

4- صورة مجال بدالة متصلة :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$.



لتكن $$m = \min\limits_{a \le x \le b} f(x)$$
$$M = \max\limits_{a \le x \le b} f(x)$$

نلاحظ أن :

$$(\forall y \in [m;M])\ (\exists x \in [a,b])\ /\ f(x) = y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال $J = [m,M]$ سابق من $I = [a,b]$ ، في هذه الحالة نقول أن f شمولية من I نحو J.

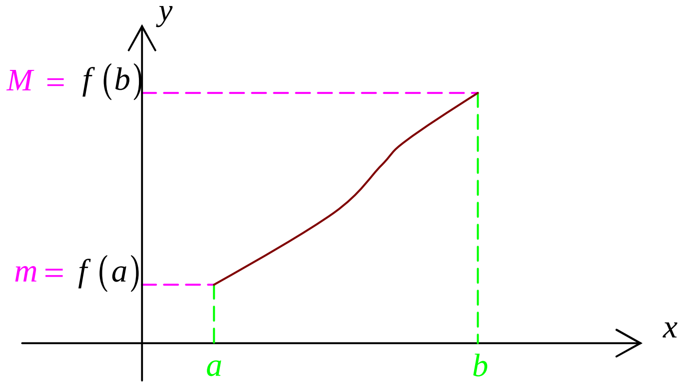
ونكتب : $$f([a,b]) = [m,M]$$

خاصيـــة :

صورة مجال من $\mathbb{R}$ بدالة متصلة هي مجال من $\mathbb{R}$.

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$.

الحالة① : f تزايدية قطعا.



$$f([a,b]) = [m,M] = [f(a), f(b)]$$

نلاحظ أن :

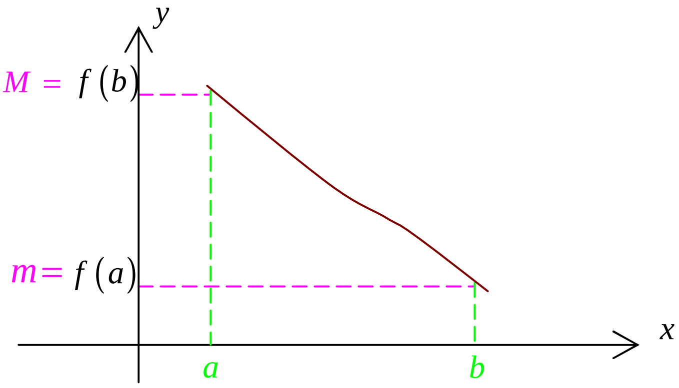
$$(\forall y \in [m,M])\ (\exists ! x \in [a,b])\ /\ f(x) = y$$

وهذا يعني أن :

لكل عنصر من المجال : $J = [m,M]$ سابق وحيـد من $I = [a,b]$.

وفي هذه الحالة نقول أن : f تقابـل من $I = [a,b]$ نحو المجال $J = [m,M]$.

الحالة② : f تناقصية قطعا.



$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

خاصيـة :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على المجال $[a,b]$ فإنها تقابـل من $[a,b]$ نحو $[m,M]$ $f([a,b])=[m,M]$.

تحديد صورة مجال :

- الحالة① : f تزايدية قطعا.

I	$J=f(I)$
$[a,b]$	$[f(a)\ ;\ f(b)]$
$[a,b[$	$\left[f(a)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\prec b}} f(x)\right[$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)\ ;\ f(b)\right]$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$

- الحالة② : f تناقصية قطعا.

I	$f(I)$
$[a,b]$	$[f(b)\ ;\ f(a)]$
$[a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\prec b} f(x)\ ;\ f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left[f(b)\ ;\ \lim\limits_{x\succ a} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ f(a)\right]$
$]-\infty,b]$	$\left[f(b)\ ;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$

تطبيـق :

حدد صورتي المجالين I و J في الحالات التالية :

- $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ $\qquad J=[0,2]$, $\qquad I=[0,+\infty[$

لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

وبما أن :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1}$$
$$= 1 - \frac{2}{x+1}$$

إذن : f تزايدية قطعا.

ومنه : $f([0,2]) = [f(0)\,;\,f(2)] = \left[-1\,;\,\frac{1}{3}\right]$

$$f([0,+\infty[) = \left[f(0)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right] = [-1\,;\,1]$$

• $I = [0,\pi]$; $J = \mathbb{R}$; $f(x) = \cos x$

لدينا : f متصلة وتناقصية قطعا على I.

إذن : $f([0,\pi]) = [f(\pi)\,;\,f(0)]$
$$= [-1\,;\,1]$$

ولدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

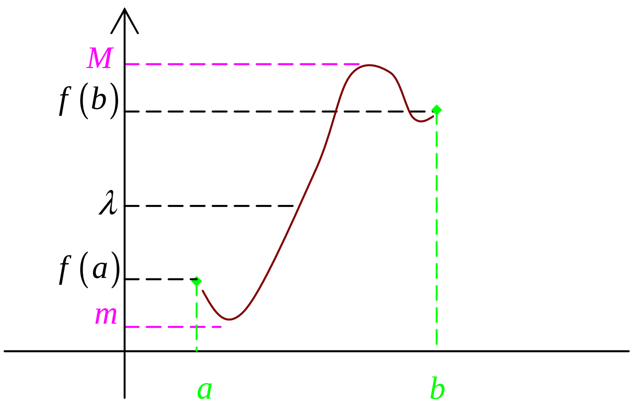
$$f(\mathbb{R}) = [-1\,;\,1]$$

5- مبرهنة القيم الوسطيــة (T.V.I)

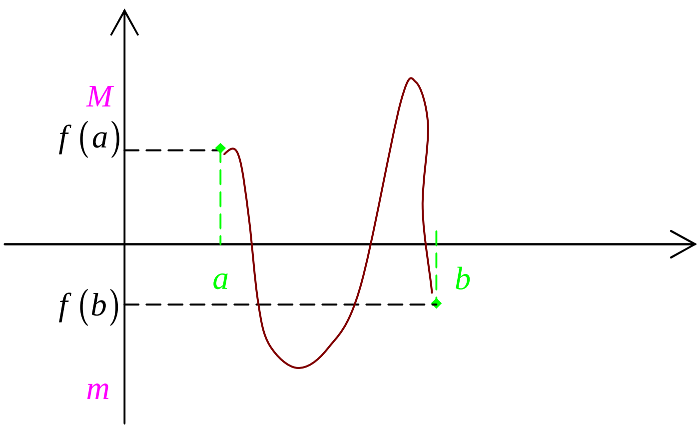
لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ و $f([a,b]) = [m,M]$

لدينا : لكل λ من $[m,M]$ سابق x من $[a,b]$.

وهذا يعني أنه لكل λ من $[m,M]$ المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حل على الأقل في $[a,b]$.



نفترض أن : $0 \prec M$ و $m \succ 0$.



بما أن : $0 \in [m,M]$

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في $[a,b]$.

مبرهنة القيم الوسطية :

إذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\cdot f(b)\prec 0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

تطبيق 1 :

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$ بحيث $f(a)\succ a$ و $f(b)\prec b$.

بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a,b]$.

الجواب :

نضع : $g(x) = f(x)-x$

بما أن : الدالة f متصلة على $[a,b]$.

فإن : الدالة g متصلة على $[a,b]$.

وبما أن : $g(a) = f(a)-a \succ 0$

و : $g(b) = f(b)-b \prec 0$

فإن : $g(a)\cdot g(b) \prec 0$

ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل من $[a,b]$.

وبالتالي المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل من المجال $[a,b]$.

تطبيق 2 :

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$ في الحالات التالية :

-1 $f(x)=x^3-1$

-2 $f(x)=x^7+x^2-1$

-3 $f(x)=1+\sin x-x$

الجواب :

-1 لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $f(0)=-1$ و $f(2)=7$

إذن : $f(0)\cdot f(2)\prec 0$

ومنه : $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

-2 لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ولدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ومنه : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

-3 لدينا : f متصلة على $\mathbb{R}$.

و : $f(0) = 1 \succ 0$

و : $f(\pi) = 1-\pi \prec 0$

إذن : $f(0)\cdot f(\pi) \prec 0$

ومنه : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{R}$.

6- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على $I=[a,b]$ و $f(I) = J = [m,M]$

إذن : f تقابل من I نحو J.

ومنه فإن : الدالة f تقبل تقابل عكسي نرمز له بـ : f^{-1}.

الدالة f^{-1} تسمى **الدالة العكسية** للدالة f.

$$\begin{tikzcd} x\in I \arrow[r, bend left, "f"] & y\in J \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

أمثلــة :

-1 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[0,+\infty[$.

بين أن : g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

الجــواب :

-1 لدينا : g قصور f على $I=[0,+\infty[$.

و f دالة جذرية حيز تعريفها $\mathbb{R}$.

إذن : f متصلة على $\mathbb{R}$.

ومنه : g متصلة على I.

ولدينا : $g(x)=\dfrac{x^2+1-1}{x^2+1} \qquad \forall x\in I$

الدالة $x\mapsto x^2+1$ تزايدية على I (قطعا).

إذن : الدالة $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ تناقصية قطعا على I.

ومنه : $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2+1}$ تزايدية قطعا على I.

ومنه : g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

وبالتالي : g تقابل $\mathbb{R}^+$ نحو J.

- تحديـد J :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و $g(0)=0$.

ومنه : $J=[0,1[$

- لنحدد $g^{-1}(x)$ لكل x من $J=[0,1[$.

لدينا : $\forall y\in[0,+\infty[$ و $\forall x\in[0,1[$

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow x = g(y) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{y^2+1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{y^2+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{y^2+1} = -x+1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ y^2+1 = \frac{1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow\ y^2 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow\ y = \pm\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

وبما أن : $y \succ 0$

فإن : $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

ومنه : $\forall x\in J \ ;\ g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

-2 $f(x)=\sqrt{x}$ $D_f=[0,+\infty[$

بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} وحدد حيز تعريف f^{-1} .

ثم : $f^{-1}(x)$ لكل x من $D_{f^{-1}}$.

الجــواب :

لدينا : f متصلة وتزايدية قطعا على D_f.

إذن : f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ومنه حيز تعريف f^{-1} هو $\mathbb{R}^+$.

- لنحدد $f^{-1}(x)$

$$\forall x\in\mathbb{R}^+ \ ;\ \forall y\in\mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow\ y = \sqrt{x}$$
$$\Leftrightarrow\ y^2 = x$$

ومنه : $f^{-1}(y)=y^2$ $\forall y\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي : $f^{-1}(x)=x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

خاصيــة :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I، و $f(I)=J$

(1 $\forall x\in I \ ;\ \forall y\in J \ ;\ f(x) = y \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y)$

(2 $\forall x\in I \ ;\ f^{-1} o f(x) = x$

(3 $\forall y\in J \ ;\ f o f^{-1}(y) = y$

دراسة الدالة f^{-1} :

- منحنى الدالة f (الرتابة)

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I. و f^{-1} الدالة العكسية للدالة f .

و : $f(I)=J$

ليكن x و y عنصرين مختلفين من J .

بحيث $f^{-1}(y)=b$ و $f^{-1}(x)=a$

لدينا :
$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(y)}{x-y}$$
$$= \frac{a-b}{f(a)-f(b)}$$
$$= \frac{1}{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}} = \frac{1}{T_{f^{-1}}}$$

إذن : $T_{f^{-1}} \times T_f \succ 0$

إذن f و f^{-1} لهما نفس المنحنى.

استنتاج وخاصية :

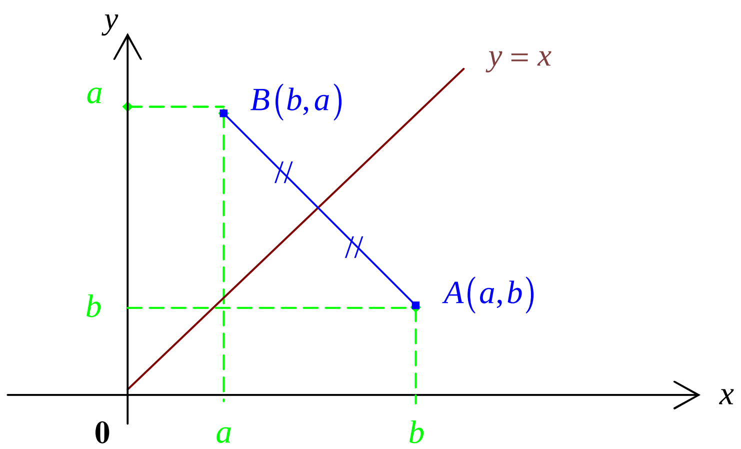
الدالتين f و f^{-1} لهما نفس المنحنى .

- **منحنى الدالة f^{-1} :**

$$\ell_f = \{ M(x,y) \in P \ / \ x \in I \text{ و } f(x) = y \}$$
$$\ell_{f^{-1}} = \{ M(y,x) \in P \ / \ y \in J \text{ و } f^{-1}(y) = x \}$$
$$= \{ M(y,x) \in P \ / \ x \in I \text{ و } f(x) = y \}$$

ملاحظة :

النقطتين $B(b,a)$ و $A(a,b)$ متماثلتين بالنسبة للمنصف الأول $(y=x)$.



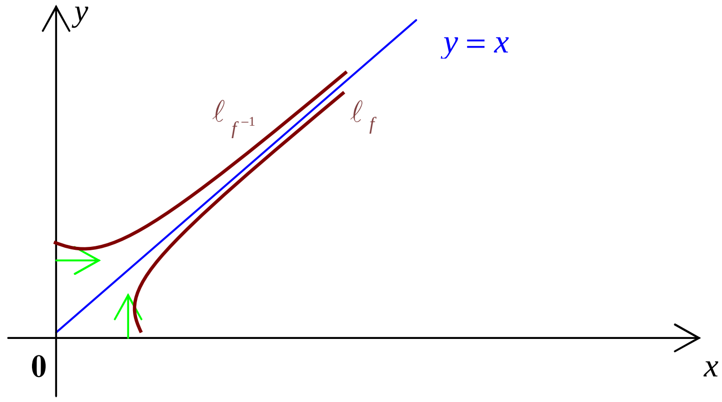
خلاصة وخاصية :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ℓ_f و $\ell_{f^{-1}}$ متماثلين بالنسبة للمنصف الأول.

أمثلـــة :

• مثـــال ① :



• مثـــال ② :